CUCEA

Modelos de control de inventarios

1. Modelos determinísticos de control de inventarios

Introducción

El inventario es cualquier recurso almacenado que sirve para satisfacer cualquier necesidad actual o futura. Es uno de los bienes más costosos para muchas compañías, pues llega a representar el 50% del capital total invertido. Por otro lado, los clientes quedan insatisfechos cuando frecuentemente se quedan sin existencias y enfrentan faltantes. El problema del inventario determina la cantidad que equilibra los dos casos extremos.

El factor importante en la formulación y solución de un modelo de inventario es que la demanda de un artículo (por unidad de tiempo) sea *determinística* (que se conozca con certidumbre) o *probabilística* (que se pueda describir con una distribución de probabilidad.

1.1 Decisiones de inventario

Existen tan sólo dos decisiones fundamentales que deben tomarse para controlar un inventario:

1. Cuánto ordenar
2. Cuándo ordenar

El propósito de todos los modelos y las técnicas de inventarios es determinar de una manera racional cuánto y cuándo ordenar. Un objetivo importante al controlar el inventario es minimizar los costos totales de inventario. Algunos de los costos más significativos del inventario son los siguientes:

1. Costo de los artículos (costo de compra o costo de materiales)
2. Costo por ordenar
3. Costo por mantener o almacenar el inventario
4. Costo por faltantes

1.2 Cantidad del lote económico: determinación de cuánto ordenar

La cantidad del lote económico (CLE) es una de las técnicas de control de inventarios más antiguas y conocidas. Algunos de los supuestos más importantes son los siguientes.

1. La demanda se conoce y es constante.
2. El tiempo de entrega (el tiempo entre colocar una orden y recibirla) se conoce y es constante.

3. La recepción del inventario es instantánea. En otras palabras, el inventario de una orden llega a un lote en cierto momento.

4. El costo de comprar por unidad es constante durante el año. Los descuentos por cantidad no son posibles.

5. Los únicos costos variables son el costo por colocar una orden, costo por ordenar; y el costo por mantener o almacenar el inventario en el tiempo, costo por almacenar. El costo por almacenar una unidad y el costo por ordenar por orden son constantes durante el año.

6. Las órdenes se colocan de manera que los faltantes se evitan por completo.

Con las siguientes variables, desarrollamos expresiones matemáticas para los costos anuales por ordenar y almacenar.

- $\boldsymbol{Q} =$ Número de piezas a ordenar
- $\boldsymbol{CLE} = \boldsymbol{Q^*} =$ Número óptimo de piezas a ordenar (unidades por unidad de tiempo)
- $\boldsymbol{D} =$ Demanda por unidad de tiempo en unidades del artículo en inventario
- $\boldsymbol{C_0} =$ Costo por colocar cada orden ($/pedido)
- $\boldsymbol{C_h} =$ Costo anual por almacenar por unidad ($ por unidad en inventario por unidad de tiempo)
- $\boldsymbol{t_0} =$ Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)
- **Costo anual por ordenar**

  $\boldsymbol{CAO} =$ (Número de órdenes colocadas por año)(Costo por ordenar por orden)

$$= \left(\frac{Demanda\ anual}{Número\ de\ unidades\ en\ cada orden}\right)(Costo\ por\ ordenar)$$

$$= \left(\frac{D}{Q}\right)\boldsymbol{C_0}$$

- **Costo anual por almacenar**

  $\boldsymbol{CAA} =$ (Inventario promedio)(Costo por almacenar por unidad)

$$= \left(\frac{Cantidad\ a\ ordenar}{2}\right)(Costo\ por\ almacenar\ por\ unidad)$$

$$= \left(\frac{Q}{2}\right)\boldsymbol{C_h}$$

- **Duración de ciclo**

$$\boldsymbol{t_0} = \frac{Q}{D}$$

Nota: La cantidad promedio de inventario es $\left(\frac{Q}{2}\right)$ porque es el punto medio entre tener la bodega llena y tenerla vacía.

- **Costo total por unidad de tiempo**

  $\boldsymbol{CT}$= Costo por ordenar + Costo por almacenar

$$= \left(\frac{D}{Q}\right) \boldsymbol{C_0} + \left(\frac{Q}{2}\right) \boldsymbol{C_h}$$

- **Cantidad de lote económico CLE**

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2DC_0}}{\boldsymbol{C_h}}}$$

En la política óptima de inventario para el modelo propuesto se sigue:

Pedir $\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2DC_0}}{\boldsymbol{C_h}}}$ unidades cada $\boldsymbol{t_0}^* = \frac{Q^*}{D}$ unidades de tiempo.

En realidad, no se necesita hacer un nuevo pedido en el instante en que se pide. En lugar de ello puede transcurrir un **tiempo de entrega** positivo, L, entre la colocación y la recepción de un pedido. En este caso el **punto de reorden** se presenta cuando el nivel de inventario baja a LD unidades. Así tenemos que

$$r = Ld$$

Donde r representa el punto de reorden que es la posición del inventario en la cual se debe colocar una orden. La **posición del inventario** (d) es la cantidad de unidades restantes en el inventario para satisfacer la demanda. El **tiempo de entrega** (L) es el periodo que hay entre el punto de colocar una orden y recibirla.

Si el tiempo de entrega L es menor que la longitud de ciclo $\boldsymbol{t_0}^*$ lo cual en general no es el caso, se define el **tiempo efectivo** de entrega como:

$$L_e = L - nt_0^*$$

Donde *n* es el numero entero más grande tal que sea menor o igual a $\frac{L}{t_0^*}$.

Otro punto a considerar ahora que se sabe cuándo ordenar y si se saben los días laborados en el año, la duración del ciclo de pedido $\boldsymbol{t_0}$ se calcula

$$\boldsymbol{t_0}^* = \frac{Q^*}{D} Y$$

Donde Y es la cantidad de días laborados en el año.

1.2.1 Ejemplo 1. Sumco, una compañía que vende bombas a otras compañías, quiere reducir su costo de inventario determinando el número óptimo de bombas que debe obtener por orden y el costo anual total. La demanda anual es de 1000 unidades, el costo por ordenar es de $10 por orden, ¿qué sucede con la demanda anual si el costo por ordenar cambia a 40?

El costo anual promedio por almacenar por unidad es de $0.50.

Solución

Los datos del problema son:

$$D = 1000\ unidades\ por\ año$$

$$C_0 = \$10\ por\ orden$$

$$C_h = \$\ 0.50\ por\ unidad\ por\ año$$

Por lo que el número óptimo de bombas es

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(1000)(10)}{0.5}} = 200\ bombas$$

Ahora si el costo por ordenar cambia a

$$C_0 = \$40\ por\ orden$$

El nuevo valor óptimo es

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(1000)(40)}{0.5}} = 400\ bombas$$

1.2.2 Ejemplo 2. Una empresa que surte microcircuitos de computadora a una compañía que los incorpora en refrigeradores y otros electrodomésticos. Uno de los componentes tiene una demanda anual de 250 unidades y es constante todo el año. El costo anual por almacenar se estima en $1 por unidad y el costo por ordenar es de $20 por orden.

a) Para minimizar el costo, ¿cuántas unidades deberían ordenarse cada vez que se coloca una orden?

b) ¿Cuántas órdenes por año se necesitan con la política óptima?

c) ¿Cuál será el costo anual por ordenar?

d) ¿Cuál es el inventario promedio si se minimizan los costos?

e) ¿Cuál es el costo anual por almacenar?

f) ¿Cuál es el costo total anual?

g) Suponga que el costo por ordenar no es $20 y que la empresa ha ordenado 150 cada vez que coloca una orden. Para que esta política de ordenar sea óptima, ¿cuál tendría que ser el costo por ordenar?

Solución

De acuerdo con la información del problema se tiene

$$D = 250 \; unidades \; por \; año$$

$$C_0 = \$20 \; por \; orden$$

$$C_h = \$\,1 \; por \; unidad \; por \; año$$

a)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(250)(20)}{1}} = 100 \; componentes, cantidad \; óptima \; que \; minimiza \; los \; costos$$

b)

$$\frac{D}{Q} = \frac{250}{100} = 2.5, cantidad \; de \; ordenes \; que \; se \; deben \; realizar \; en \; el \; año$$

c)

$$\frac{D}{Q} C_0 = 2.5(20) = 50, costo \; por \; las \; ordenes \; realizadas \; en \; el \; año$$

d)

$$\frac{Q}{2} = \frac{100}{2} = 50, punto \; en \; que \; la \; bodega \; se \; encuentra \; a \; la \; mitad \; de \; su \; capacidad$$

e)

$$\frac{Q}{2} C_h = 50(1) = 50, costo \; por \; mantener \; la \; bodega \; a \; la \; mitad \; de \; su \; capacidad$$

f)

$$CT = \left(\frac{D}{Q}\right) \boldsymbol{C_0} + \left(\frac{Q}{2}\right) \boldsymbol{C_h} = 50 + 50 = 100$$

g) Para este inciso los datos son

$$D = 250 \; unidades \; por \; año$$

$$C_h = \$\,1 \; por \; unidad \; por \; año$$

$$Q = 150 \; unidades \; por \; orden$$

$$C_0 = ?$$

A partir de la fórmula de cantidad óptima de pedido

$$\boldsymbol{Q} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2DC_0}}{\boldsymbol{C_h}}}$$

se puede despejar el costo por colocar una orden $\boldsymbol{C_0}$**.** Primero elevamos ambos lados de la ecuación al cuadrado con lo que

$$\boldsymbol{Q^2} = \frac{\boldsymbol{2DC_0}}{\boldsymbol{C_h}}$$

Ahora el termino $\boldsymbol{C_h}$ que está dividiendo lo pasamos al lado izquierdo multiplicando

$$\boldsymbol{C_h Q^2} = \boldsymbol{2DC_0}$$

Por último $\boldsymbol{2D}$ que está multiplicando lo pasamos dividiendo al lado izquierdo

$$\frac{\boldsymbol{C_h Q^2}}{\boldsymbol{2D}} = \boldsymbol{C_0}$$

Con lo que ahora tenemos una fórmula para calcular el costo por colocar una orden $\boldsymbol{C_0}$**,** con los datos del problema

$$\boldsymbol{C_0} = \frac{\boldsymbol{C_h Q^2}}{\boldsymbol{2D}} = \frac{\boldsymbol{(1)(150)^2}}{\boldsymbol{2(250)}} = \boldsymbol{45}, costo \; por \; realizar \; una \; orden$$

Y para determinar el costo anual por ordenar consideramos

$$\boldsymbol{CAO} = \left(\frac{D}{Q}\right) \boldsymbol{C_0} = \left(\frac{250}{150}\right)\boldsymbol{(45)} = \boldsymbol{75}, costo \; por \; las \; ordenes \; realizadas \; en \; el \; año$$

1.2.3 Ejemplo 3. La demanda de chips para computadora de Procomp es de 8,000 por año. La empresa tiene una demanda diaria de 40 unidades y la cantidad de lote económico es de 400 unidades. La entrega de una orden toma tres días laborales. ¿Cuál es el punto de reorden para el chip? ¿Cuál es el tiempo que existe entre cada periodo de entrega si la empresa labora 288 días al año?

Solución

Consideramos d en lugar D para referirnos a la demanda diaria así los datos son

$$L = 3 \; tiempo \; en \; dias \; que \; tarda \; la \; entrega \; de \; la \; orden$$

$$d = 40 \; unidades\ como\ demanda\ diaria$$

El punto de reorden es

$$r = Ld = (3)(40) = 120$$
$$unidades\ restantes\ a\ partir\ de\ las\ cuales\ se\ debe\ realizar\ una\ orden$$

El tiempo que existe entre cada periodo

$$t_0 = \frac{Q}{D}Y = \frac{400}{8000}(288) = 14.4, \; días\ que\ trancurren\ entre\ cada\ orden$$

1.2.4 Ejemplo 4. Se cambian luces de neón en una universidad a una tasa de 100 unidades diarias. Estas luces de neón se piden en forma periódica. Cuesta \$100 iniciar una orden de compra. Se estima que una luz de neón en el almacén cuesta unos \$0.02 diarios. El tiempo de entrega, entre la colocación y la reparación de un pedido es de 12 días. Determine la política óptima de inventario para pedir las luces de neón.

Solución

El problema proporciona los siguientes datos

$$D = 100 \; unidades\ por\ día$$
$$C_0 = \$\ 100 \; por\ orden$$
$$C_h = \$\ 0.02 \; por\ unidad\ y\ por\ día$$
$$L = 12 \; días\ entre\ ordenes$$

Así,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(100)(100)}{0.02}} = 1000, \; luces\ de\ neón$$

La longitud de ciclo o duración de ciclo

$$t_0 = \frac{Q^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10, \; días\ entre\ cada\ orden$$

Como el tiempo de entrega L=12 días es mayor que la longitud del ciclo t_0 se debe calcular L . La cantidad de ciclos incluidos en L es

$$n = \frac{L}{t_0} = \frac{12}{10} = 1.2$$

Se toma la parte entera por lo que

$$n = 1$$

Entonces

$$L_e = L - nt_0 = 12 - (1)(10) = 2\ días$$

Por lo que el punto de reorden se presenta cuando la cantidad de inventario baja a

$$L_e d = (2)(100) = 200, luces\ de\ neón$$

La política de inventario para pedir las luces de neón es

Pedir 1000 unidades cuando el inventario baja a 200 unidades

El costo diario de inventario correspondiente a la política propuesta es

$$CT = \left(\frac{D}{Q}\right) \boldsymbol{C_0} + \left(\frac{Q}{2}\right) \boldsymbol{C_h} = \left(\frac{100}{1000}\right) (\mathbf{100}) + \left(\frac{1000}{2}\right)(\mathbf{0.02}) = \$\mathbf{20}\ por\ día$$

1.3. CLE sin el supuesto de reabastecimiento instantáneo

Cuando una empresa recibe su inventario durante cierto periodo, se necesita un nuevo modelo que no haga el supuesto de **recepción instantánea** el cuál se aplica cuando el inventario fluye de manera continua o se acumula durante un periodo después de colocar una orden, o cuando las unidades de producen y venden de forma simultánea. En tales circunstancias, debe tomarse en cuenta la tasa de demanda diaria. Puesto que este modelo es adecuado en especial para los entornos de producción, es común llamarlo **modelo de corrida de producción**.

Dadas las siguientes variables:

- $D =$ Demanda por unidad de tiempo en unidades del artículo en inventario
- $Q =$ número de piezas por orden o de corrida de producción
- $C_0 =$ Costo por colocar cada orden ($/pedido)
- $C_s =$ costo por preparación
- $C_h =$ costo anual por almacenar por unidad
- $p =$ tasa de producción diaria
- $d =$ tasa de demanda diaria
- $t =$ magnitud de la corrida de producción en días

se tiene

- Duración del ciclo de producción

$$\frac{Q}{p}$$

- Número de corridas de producción

$$\frac{D}{Q}$$

- Nivel máximo del inventario

$$Q\ (1 - \frac{d}{p})$$

- Inventario promedio

$$\frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})$$

- Costo anual por almacenar

$$\frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})\ C_h$$

- Costo anual por preparación

$$\frac{D}{Q}C_s$$

- Costo anual por ordenar

$$\frac{D}{Q}C_0$$

- Costo total del inventario

$$CT = \frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})\ C_h + \frac{D}{Q}C_s$$

- Cantidad óptima de producción

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{C_h\ (1 - \frac{d}{p})}}$$

- Tiempo de ciclo para cada corrida

$$t_0 = \frac{número\ de\ días\ laborados}{número\ de\ corridad\ de\ producción}$$

$$t_0 = \frac{Y}{\frac{D}{Q^*}}$$

$$t_0 = \frac{Q^*}{D}Y$$

1.3.1 Ejemplo 1. Una empresa que fabrica unidades de refrigeración comercial por lotes. La empresa estima que la demanda para el año es de 10000 unidades. Cuesta aproximadamente $100 preparar el proceso de manufactura y el costo anual por almacenar es de cerca de 50 centavos por unidad. Cuando el proceso de producción queda establecido, se pueden fabricar 80 unidades de refrigeración diarias. La demanda durante el periodo de producción ha sido casi siempre de 60 unidades cada día. La empresa opera su área de producción de unidades de refrigeración 167 días por año. ¿Cuántas unidades de refrigeración debería producir en cada lote? ¿Cuánto debería durar la parte de producción de cada ciclo?

Solución

Los datos del problema son

$$D = 10000\ unidades\ anuales$$

$$C_s = \$100\ por\ preparar\ el\ proceso$$

$$C_h = \$0.5\ por\ almacenar\ una\ unidad$$

$$d\ = 60\ unidades\ demandas\ diariamente$$

$$p = 80\ unidades\ fabricadas\ diaramente$$

$$Y = 167\ días\ laborados\ en\ el\ año$$

Se tiene que

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{C_h\ (1-\frac{d}{p})}} = \sqrt{\frac{2(10000)(100)}{(0.5)\ (1-\frac{60}{80})}} = 4000\ unidades\ de\ refrigeración$$

Y el tiempo de producción

$$\frac{Q}{p} = \frac{4000}{80} = 50$$

1.4. Modelos de descuentos por cantidad

Cuando se desarrolla el modelo de CLE, no hay un supuesto que marque el descuento en la adquisición de cierta cantidad de unidades, sin embargo, muchos proveedores ofrecen descuento por cantidad. Al suceder eso, se pueden hacer ajustes al CLE para minimizar el costo total del inventario con dichos descuentos.

Cuando se dispone de un descuento el costo del material se vuelve relevante, pues cambia de acuerdo a la cantidad demandada. Ahora, los costos relevantes totales son:

$$Costo\ total = DC + (\frac{D}{Q})\ C_0 + (\frac{Q}{2})C_h$$

donde:

$D =$ Demanda anual en unidades

$C_0 =$ Costo por ordenar de cada orden

$C =$ Costo por unidad

$C_h =$ Costo anual por almacenar o por mantener por unidad

Como el costo anual por almacenar por unidad se basa en el costo de los artículos, es conveniente expresarlo como:

$$C_h = IC$$

donde:

$I =$ Costo por almacenar como porcentaje del costo unitario (C)

Para determinar el CLE con un modelo de descuentos por cantidad se realiza de la siguiente manera:

1. Se calcula el CLE para cada categoría de descuento
2. Si la CLE es menor a la cantidad mínima para el descuento, se ajusta la cantidad Q^* para que sea igual al mínimo para el descuento
3. Para cada CLE o Q ajustada, se calcula el costo total.
4. Se elige la cantidad con menor costo.

1.4.1 Ejemplo 1. Una distribuidora de detectores de metales tiene una demanda anual de 1400. El costo de un detector típico para Dorsey es de \$400. El costo por almacenar se estima en 20% del costo unitario, en tanto que el costo por ordenar es de \$25 por orden. Si la cantidad que se ordena es de 300 o más, puede obtener un descuento de 5% sobre el costo de los detectores. ¿Debería la distribuidora tomar el descuento por cantidad? Suponga que la demanda es constante.

Solución

Primero revisamos el caso sin descuento

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1400)(25)}{0.2(400)}} = 29.5804$$

$$Costo\ total = DC + \left(\frac{D}{Q}\right) C_0 + \left(\frac{Q}{2}\right) C_h$$

$$CT = (1400)(400) + \left(\frac{1400}{29.58}\right)(25) + \left(\frac{29.58}{2}\right)(0.2(400)) = 562366.4$$

Para realizar la comparación se revisa el caso con descuento, el descuento es 5% del costo del detector así el costo sería

$$(400)(1 - 0.05) = (400)(0.95) = 380$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1400)(25)}{0.2(380)}} = 30.349$$

Q^* es 30.349 esto es menor que la cantidad para el descuento de 300, de modo que se debe considerar como Q la cantidad para el descuento.

$$CT = (1400)(380) + (\frac{1400}{300})(25) + (\frac{300}{2})(0.2(380)) = 543516.67$$

El costo con descuento es menor por lo que se debe de tomar el descuento.

1.4.2 Ejemplo 2. Una fábrica tiene una demanda de 1,000 bombas cada año. El costo de una bomba es de \$50. La fábrica tiene un costo de \$40 por colocar una orden y un costo de almacenar de 25% del costo unitario. Sus bombas se ordenan en cantidades de 200. La compañía puede obtener un descuento de 3% sobre el costo de las bombas. ¿Debería ordenar 200 bombas cada vez y optar por el descuento de 3%?

Solución

Primero se considera el caso sin descuento

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1000)(40)}{0.25(50)}} = 80$$

$$CT = (1000)(50) + (\frac{1000}{80})(40) + (\frac{80}{2})((0.25)(50)) = 51000$$

Para el descuento la cantidad óptima debe ser

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(1000)(40)}{0.25(48.5)}} = 81.228$$

Como el valor optimo es menor de lo requerido para el descuento se considera la cantidad mínima para el descuento en este caso es $Q = 200$ y con ella calculamos el costo total con descuento.

$$CT = (1000)(48.5) + (\frac{1000}{200})(40) + (\frac{200}{2})((0.25)(48.5)) = 49912.5$$

1.4.3 Ejemplo 3. La tienda por departamentos Brass almacena automóviles de carreras de juguete. Hace poco, la tienda recibió el programa de descuento por cantidad para los vehículos, el cual se presenta de la siguiente manera: el costo normal del juguete es de \$5. Para órdenes entre 1000 y 1999 unidades, el costo unitario es de \$4.80; en tanto que para órdenes de 2000 o más, el costo unitario es de \$4.75. Más aún, el costo por ordenar es de \$49 por orden, la demanda anual es de 5000 carritos de carreras y el cargo por almacenar como porcentaje del costo es de 20%. ¿Qué cantidad a ordenar minimizará el costo total del inventario?

Solución

Se calcula primero la cantidad óptima para el caso sin descuento

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{0.2(5)}} = 700$$

Ahora el costo total para esta cantidad optima

$$CT = (5000)(5) + (\frac{5000}{700})(49) + (\frac{700}{2})((0.2)(5)) = 25700$$

Continuamos revisando ahora el caso de órdenes entre 1000 y 1999 unidades

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{0.2(4.8)}} = 714.43$$

Como este resultado es inferior al mínimo del descuento se considera $Q^* = 1000$

$$CT = (5000)(4.8) + (\frac{5000}{1000})(49) + (\frac{1000}{2})((0.2)(4.8)) = 24725$$

El siguiente caso es para órdenes entre 2000 o más

$$\overset{*}{Q} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{0.2(4.75)}} = 718.18$$

Este valor es inferior al requerido para el descuento así que se considera $Q^* = 2000$

$$CT = (5000)(4.75) + (\frac{5000}{2000})(49) + (\frac{2000}{2})((0.2)(4.75)) = 24822.5$$

Comparando los costos totales para cada caso el costo total menor es cuando se ordenan 1000 carros así esta es la mejor opción para Brass.

2. Modelo de inventario de período único con demanda probabilística

Los modelos de control de inventarios vistos hasta ahora se basan en los supuestos de que la tasa de demanda es constante y determinística a lo largo del año. O sea que la demanda futura sigue siendo la misma. Existen algunos productos para los que se toma una decisión de satisfacer la demanda para un solo periodo, y los artículos que no se venden durante este tiempo no tienen valor, o bien, su valor se reduce considerablemente en el futuro. Para resolver esto, se emplea un análisis marginal o incremental.

Dicho análisis no es más que la toma de decisiones que utiliza la ganancia marginal o la pérdida marginal.

Ganancia Marginal (GM)= es la ganancia adicional lograda cuando se almacena y se vende una unidad adicional.

Pérdida Marginal (PM)= es la pérdida que ocurre cuando se almacena una unidad adicional, pero no se puede vender.

2.1 Análisis marginal con distribuciones discretas

Encontrar el nivel de inventario con el menor costo no es difícil cuando seguimos el procedimiento del análisis marginal, que indica que se debe almacenar una unidad adicional solo si la ganancia marginal esperada para esa unidad es mayor que la pérdida marginal esperada. Esta relación se expresa simbólicamente como:

$P =$ Probabilidad de que la demanda sea mayor o igual que una oferta dada

$1 - P =$ Probabilidad de que la demanda sea menor que la oferta

$(P)(GM) =$Ganancia marginal esperada

$(1 - P)(PM) =$ Pérdida marginal esperada

La regla de decisión óptima es almacenar la unidad adicional si:

$$(P)(GM) \geq (1 - P)(PM)$$

de otra forma

$$P \ \geq ((PM)/(PM + GM))$$

Pasos del análisis marginal con distribuciones discretas

1. Determinar el valor de $\frac{PM}{PM+GM}$ para el problema.

2. Construir una tabla de probabilidades y agregar una columna de probabilidad acumulada.

3. Seguir ordenando inventario mientras la probabilidad P de vender al menos una unidad adicional sea mayor que $\frac{PM}{PM+GM}$, lo cual dice que mientras la probabilidad de vender una unidad más "P" sea mayor o igual que $\frac{PM}{PM+GM}$, almacenaríamos la unidad adicional.

2.1.1 Ejemplo 1. Un café popular tiene como especialidades el café y las rosquillas; compra las rosquillas recién hechas todos los días a una pastelería grande. El café paga $4 por cada caja (con dos docenas de rosquillas) entregada cada mañana. Cualquier caja no vendida al final de día se tira, pues ya no estarían recién hechas para cumplir con los estándares del café. Si una caja de rosquillas se vende, el ingreso total es de $6. De las ventas del pasado se sigue una distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla:

Ventas diarias (cajas de rosquillas)	Probabilidad (P) de que la demanda esté en este nivel
4	0.05
5	0.15
6	0.15
7	0.2
8	0.25
9	0.1
10	0.1
Total	1

Solución

Lo primero es identificar la perdida marginal PM=4 que es el costo por caja y la ganancia marginal se calcula: el precio de venta menos el costo es decir GM=6-4= 2

$$P = \frac{PM}{PM + GM} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = 0.6667$$

Se agrega una nueva columna a la tabla para reflejar que la probabilidad de que las rosquillas se vendan está en este nivel o en uno mayor. Para esto, se suma la probabilidad del renglón con las siguientes

Ventas diarias (cajas de rosquillas)	Probabilidad (P) de que la demanda esté en este nivel	Probabilidad (P) de que la demanda esté en este nivel o más alto
4	0.05	0.05+0.15+0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=1
5	0.15	0.15+0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=0.95
6	0.15	0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=0.8
7	0.2	0.2+0.25+0.1+0.1=0.65
8	0.25	0.25+0.1+0.1=0.45
9	0.1	0.1+0.1=0.2
10	0.1	0.1
Total	1	

Para tomar la decisión de cuantas cajas seguir ordenando, se considera el valor P=0.6667 y se elige el valor más pequeño que cumpla que se mayor o igual a 0.6667 en la tabla esta seria:

Ventas diarias (cajas de rosquillas)	Probabilidad (P) de que la demanda esté en este nivel	Probabilidad (P) de que la demanda esté en este nivel o más alto
4	0.05	0.05+0.15+0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=1
5	0.15	0.15+0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=0.95
6	0.15	0.15+0.2+0.25+0.1+0.1=0.8
7	0.2	0.2+0.25+0.1+0.1=0.65
8	0.25	0.25+0.1+0.1=0.45
9	0.1	0.1+0.1=0.2
10	0.1	0.1
Total	1	

Así la cantidad óptima de cajas que se tendría que tener en el inventario es 6.

2.2 Análisis marginal con distribución normal

Cuando la demanda del producto o las ventas siguen una distribución normal, se aplica el análisis marginal con la distribución normal. Se resuelve siguiendo los siguientes pasos:

1. Determinar el valor $\frac{PM}{PM+GM}$ para el problema
2. Localizar P en la distribución normal y encontrar el valor Z asociado.
3. Encontrar x^* usando la relación $Z = \frac{x^* - \mu}{\sigma}$, de donde se tiene $x^* = \mu + Z\sigma$

1. **Ejemplo 1.** La demanda de un periódico en un quiosco tiene distribución normal y un promedio diario de 60 periódicos, con una desviación estándar de 10. Con una pérdida marginal de 20 centavos y una ganancia marginal de 30 centavos, ¿qué política de almacenamiento se debería seguir?

Solución

Primero se calcula la política de almacenamiento

$$P = \frac{20}{20+30} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Cuando el valor P es menor a 0.5 para encontrar el valor Z correspondiente se hace

$$1 - 0.4 = 0.6$$

El valor de 0.6 se busca en la tabla de la distribución normal, dentro del conjunto de valores el valor más cercano a 0.6 tiene una coordenada

$$Z = 0.25$$

Considerando la relación

$$x^* = \mu + Z\sigma$$

Sustituimos los valores $\mu = 60$, $\sigma = 10$ y $Z = 0.25$

$$x^* = 60 + 0.25(10)$$

$$x^* = 62.5$$

Para garantizar que no se tengan perdidas el valor x^* se redondear hacia abajo, así $x^* = 62$.

2. **Ejemplo 2.** En el mismo quiosco se almacena otro periódico y su pérdida marginal es de 40 centavos y la ganancia marginal es de 10, Las ventas diarias tienen una media de 100 ejemplares con desviación estándar de 10.

Solución

Se inicia calculando la política de almacenamiento

$$P = \frac{40}{40 + 10} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Cuando el valor P es mayor o igual a 0.5 se busca directamente el valor más cercano en este caso a 0.8 y se considera su coordenada como el valor Z, buscando en la tabla de la distribución normal se obtiene

$$Z = 0.84$$

Este valor se tiene que multiplicar por -1 así

$$Z = -0.84$$

Considerando la relación

$$x^* = \mu + Z\sigma$$

Sustituimos los valores $\mu = 100$, $\sigma = 10$ y $Z = -0.84$

$$x^* = 100 - 0.84(10)$$

$$x^* = 91.6$$

Para garantizar que no se tengan perdidas el valor x^* se redondear hacia abajo, así $x^* = 91$.

Referencias

Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., Cochran, J., Fry, M. y Ohlmann, J. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios* (13ª ed.). (Trad. V. Altamirano). México, D.F.: Cengage Learning Editores.

Izar Landeta, J. (2012). *Investigación de operaciones*. México, D.F.: Editorial Trillas.

Render, B., Stair, R., Hanna, M. y Hale, T. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios* (12ª ed.). (Trad. J. Murrieta). México, D.F.: Pearson Educación de México.

Winston, W. (2005). *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos* (4ª ed.). (Trad. M. Bruna y F. Sánchez). México: Thomson.

Créditos

Mtro. José Alberto Castellanos Gutiérrez
Rector del CUCEA

Dr. José Alberto Becerra Santiago
Secretario Académico

Mtro. César Omar Pérez Mora
Secretario Administrativo

Mtra. Irene Huízar Navarro
Coordinadora de Tecnologías para el Aprendizaje

Mtro. Jonathan Roberto Venegas Barrera
Experto disciplinar

Lic. Ruth Dayra Jaramillo Rodríguez
Diseñadora instruccional

Lic. Claudia Fabiola Olmos de la Cruz
Jefa de Diseño Gráfico

Laura Belén Cuevas de la Torre
Correctora de estilo

Fecha de elaboración: 20/09/18
Centro Universitario de Ciencias Económico
Administrativas
Coordinación de Tecnologías para el Aprendizaje
Unidad de Diseño Educativo
Zapopan, Jalisco 2018